Chapitre 7

Arithmétique

I Nombres premiers

Définition : Un nombre premier est un nombre qui a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Remarque : 2 est le seul nombre premier pair. (C'est évident puisque si un nombre est pair alors il a 2 comme diviseur)

Exemples : Les dix plus petits nombres premiers sont :

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29

Remarque : Méthode pour trouver tous les nombres premiers inférieurs à un certain nombre : le cribble d'Eratothène.

Propriété : il y a une infinité de nombres premiers.

II Théorème fondamental de l'algèbre

Théorème : Tout nombre entier se décompose de façon unique comme un produit de nombres premiers à l'ordre des facteurs près.

Remarque : "de façon unique" signifie que quelle que soit la méthode que nous utiliserons pour décomposer un nombre, nous obtiendrons le même résultat.

Exemple :

$$\begin{aligned}120 &= 2\times 60\\ &= 2\times 2\times 30\\ &= 2\times 2\times 2\times 15\\ &= 2\times 2\times 2\times 3\times 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}120 &= 12\times 10\\ &= 6\times 2\times 2\times 5\\ &= 3\times 2\times 2\times 2\times 5\\ &= 2\times 2\times 2\times 3\times 5\end{aligned}$$

Remarque : Par habitude, on écrit les nombres dans la décomposition du plus petit au plus grand.

III Critères de divisibilité

Un nombre est :

* Divisible par 2 si il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8.
* Divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
* Divisible par 5 si il se termine par 0 ou 5.
* Divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
* Divisible par 10 si il se termine par 0.

IV Applications de la décomposition

1) Trouver les diviseur d'un nombre

On obtient un diviseur d'un nombre en ne gardant que certains termes de sa décomposition. On obtient donc la liste des diviseurs en faisant toutes les combinaisons possibles.

Exemple : $374 = 2 \times 11 \times 17$ Les diviseurs de 374 sont donc :

$1 \quad 2 \quad 11 \quad 17 \quad 2 \times 11 = 22 \quad 2 \times 17 = 34$

$11 \times 17 = 187 \quad 2 \times 11 \times 17 = 374$

2) Trouver un diviseur de deux nombres

La décomposition d'un diviseur de deux nombres est constitué par des facteurs communs des deux décompositions des nombres.

Exemple : on a les décompostions suivantes : $924 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 11$

$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$

Les termes 2, 2 et 3 sont en commun dans les deux décompositions.
Les diviseurs de 120 et 924 (= nombres qui ont dans leurs tables 120 et 924) sont : 2 3 2×2 2×3 $2 \times 2 \times 3$

Définition :
On appelle PGCD (Plus Grand Commun Diviseur) de deux nombres A et B, noté PGCD(A;B), le plus grand nombre qui divise à la fois A et B.

On obtient le PGCD de deux nombres en pultipliant les termes qu'ils ont en commun.

Exemple : $420 = \underline{2} \times \underline{2} \times 3 \times \underline{5} \times \underline{7}$ $10780 = \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{5} \times \underline{7} \times 7 \times 11$

$$\text{donc } PGCD(420;10780) = 2 \times 2 \times 5 \times 7 = 140$$

3) Simplification de fraction

Lorsque l'on a les décompositions du numérateur et du dénominateur d'une fraction, il suffit d'éliminer les termes en commun pour la simplifier.

Exemple : $120 = 2\times2\times2\times3\times5 \qquad 924 = 2\times2\times3\times7\times11$

$$\text{donc } \frac{120}{924} = \frac{\cancel{2}\times\cancel{2}\times2\times\cancel{3}\times5}{\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times7\times11} = \frac{2\times5}{7\times11} = \frac{10}{77}$$

4) Trouver le PPCM de deux nombres

Définition :

On appelle PPCM (Plus Petit Commun Multiple) de deux nombres A et B, noté PGCD(A;B), le plus petit nombre qui est divisible à la fois par A et B.

Pour trouver un nombre qui est un multiple de deux nombres donnés, on décompose les deux nombres et on rajoute à une décompostion les facteurs manquants pour avoir les termes de celle de l'autre.

Exemple : On a les décompositions suivantes : $120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$

$924 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 11$

Dans la décomposition de 120, il manque un 7 et un 11 pour avoir les termes de la décomposition de 924. On va les rajouter. On obtient le nombre suivant :

$$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 9240$$

Ce nombre est le plus petit multiple de 120 et de 924.

5) Simplifier les racines carrées

Formule importante : Quels que soient les nombres a et b, $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

Pour simplifier une racine carrée, on décompose le nombre, on sort de la racine les termes en double car ils vont s'annuler avec la racine carrée.

Exemple : On veut simplifier

$$5880 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 7$$

donc $\sqrt{5880} = \underbrace{\sqrt{2 \times 2}}_{=2} \times \underbrace{\sqrt{7 \times 7}}_{=7} \times \sqrt{2 \times 3 \times 5} = 2 \times 7 \times \sqrt{30} = 14\sqrt{30}$