

Chapitre 3

Arithmétique

I Nombres premiers

Définition : Un nombre premier est un nombre qui a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Remarque : 2 est le seul nombre premier pair. (C'est évident puisque si un nombre est pair alors il a 2 comme diviseur)

Exemples : Les dix plus petits nombres premiers sont :

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29

Remarque : Méthode pour trouver tous les nombres premiers inférieurs à un certain nombre : le crible d'Ératosthène.

Propriété : il y a une infinité de nombres premiers.

II Théorème fondamental de l'algèbre

Théorème : Tout nombre entier se décompose de façon unique comme un produit de nombres premiers à l'ordre des facteurs près.

Remarque : "de façon unique" signifie que quelle que soit la méthode que nous utiliserons pour décomposer un nombre, nous obtiendrons le même résultat.

Exemple : $120 = 2 \times 60$

$$= 2 \times 2 \times 30$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 15$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

$$120 = 12 \times 10$$

$$= 6 \times 2 \times 2 \times 5$$

$$= 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

Remarque : Par habitude, on écrit les nombres dans la décomposition du plus petit au plus grand.

III Critères de divisibilité

Un nombre est :

- * Divisible par 2 si il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8.
- * Divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- * Divisible par 5 si il se termine par 0 ou 5.
- * Divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
- * Divisible par 10 si il se termine par 0.

IV Applications de la décomposition

1) Simplification de fraction

Lorsque l'on a les décompositions du numérateur et du dénominateur d'une fraction, il suffit d'éliminer les termes en commun pour la simplifier.

Exemple : $120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$ $924 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 11$

donc $\frac{120}{924} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times 5}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times 7 \times 11} = \frac{2 \times 5}{7 \times 11} = \frac{10}{77}$

2) Trouver un diviseur de deux nombres

La décomposition d'un diviseur de deux nombres est constitué par des facteurs communs des deux décompositions des nombres.

Exemples : on a les décompositions suivantes : $924 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 11$
 $120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$

Les termes 2, 2 et 3 sont en commun dans les deux décompositions.

Les diviseurs de 120 et 924 (= nombres qui ont dans leurs tables 120 et 924) sont :

2 3 2×2 2×3 $2 \times 2 \times 3$

3) Trouver un multiple de deux nombres

Pour trouver un nombre qui est un multiple de deux nombres donnés, on décompose les deux nombres et on rajoute à une décomposition les facteurs manquants pour avoir les termes de celle de l'autre.

Exemple : On a les décompositions suivantes : $120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$
 $924 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 11$

Dans la décomposition de 120, il manque un 7 et un 11 pour avoir les termes de la décomposition de 924. On va les rajouter. On obtient le nombre suivant :

$$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 9240$$

Ce nombre est le plus petit multiple de 120 et de 924.