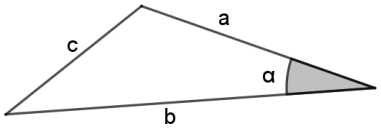
POUR ALLER PLUS LOIN

La relation d'Al-Kashi généralise le théorème de Pythagore aux triangles non rectangles. Bien qu'un résultat similaire (avec des longueurs seulement) fût déjà connu d'Euclide (≈ 300 ans avant JC), le nom francisé du mathématicien perse Ghiyath Al-Kashi (1380-1429) apparut dans les années 1990 dans les manuels scolaires édités en France, les appellations théorème de Pythagore généralisé ou loi des cosinus étant utilisés jusque-là.

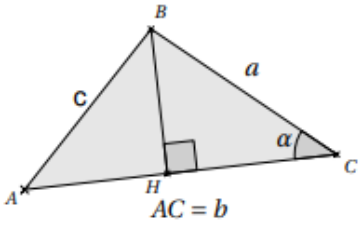
Formule d'Al-Kashi :
Si a, b et c sont les trois longueurs des côtés d'un triangle et α la mesure de l'angle formé par les côtés de longueur a et b alors on a :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \times a \times b \times \cos(\alpha)$$



Le but de l'exercice est de démontrer cette formule.

1) Construire un triangle quelconque. Mesurer ses trois côtés et un angle. Vérifier que la formule d'Al-Kashi est vraie pour cet exemple.
2) Soit un triangle ABC. On appelle c la longueur AB, b la longueur AC et a la longueur BC. Nous allons rajouter le point H le pied de la hauteur issue de B. Voici la figure sur laquelle tu vas travailler :



a. Exprimer HC en fonction de α et de a. *(utiliser la trigonométrie)*
b. Exprimer AH en fonction de α, b et a. *(pense à utiliser la question a)*
c. En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle ABH, exprimer BH^2 en fonction de α, b et a.
d. En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle CBH, exprimer BH^2 en fonction de α et a.
e. Utiliser l'égalité des deux expressions de BH^2 pour démonter la formule d'Al-Kashi.