Feuille d'exercice : Topologie

<u>Exercice 1:</u> (La somme de deux sous-espaces fermés)
Soient E un espace vectoriel normé (sur K $= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), F, G deux sous espaces de E. On suppose F fermé et G de dimension finie, montrer que $F + G = \{x + y, x \in F, G \in G\}$ est fermé.

<u>Exercice 2:</u> (somme d'ouverts et de fermés)
Soit E un espace vectoriel normé. Soient $A \subset E$ et $B \subset E$ deux parties de E. On pose :

$$A + B = \{e \in E \mid \exists a \in A \text{ et } b \in B \text{ tels que } e = a + b\}$$

1. Démontrer que si A est un ouvert alors $A + B$ est ouvert.
2. Démontrer que les parties $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ et $B = \{0\} \times \mathbb{R}$ sont fermées.
3. Démontrer dans ce cas que $A + B$ n'est pas fermé.

<u>Exercice 3:</u> (Ev normé complet)
Montrer que l'espace $C([0, 1]; \mathbb{R})$ muni de la norme $||f||_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$ n'est pas un espace vectoriel normé complet.

<u>Exercice 4:</u> (Equivalence de normes)
Soit $\Gamma = \{f \in C([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$. Pour $f \in \Gamma$, on pose $||f|| = ||f + 2f' + f"||_\infty$.

1. Montrer que $||.||$ est une norme plus fine que la norme uniforme $||.||_\infty$ sur Γ.
2. Les normes $||.||$ et $||.||_\infty$ sont-elles équialentes sur Γ ?

Exercice 5: (Norme sur l'espace des fonctions continues)

Soit $\alpha > 0$. On considère les normes suivantes sur l'espace $C([0,1])$:

$$||f||_\infty = \underset{x\in[0,1]}{sup} |f(x)| \text{ et } ||f||_1 = a \int_0^1 |f(t)|dt$$

1. Montrer que $||.||_\infty$ et $||.||_1$ définissent bien des normes sur $C([0,1])$.
2. Montrer que $||f|| = min(||f||_\infty, ||f||_1)$ est une norme sur $C([0,1])$ si et seulement si $a \leqslant 1$.

Exercice 6: (L'ensemble des nombres premiers est infini :))

Pour $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ on pose $N_{a,b} = \{a + nb, n \in \mathbb{Z}\}$.

Pour A une partie non vide de $\mathbb{Z}$, A est ouvert si $\forall a \in A\ \exists b \in \mathbb{N}^*$ tel que $N_{a,b} \subset A$.

1. Montrer que l'on a bien défini une topologie sur $\mathbb{Z}$ (i.e. une réunion d'ouverts est un ouvert et l'intersection finie d'ouverts est un ouvert).
2. Montrer que tout ouvert non vide est de cardinal infini.
3. Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $N_{a,b}$ est à la fois ouvert et fermé.
4. En déduire que l'ensemble des nombres premiers est infni.

Exercice 7: (Autour des matrices nilpotentes)

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que A est nilpotente si et seulement si il existe une suite de matrice $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ semblables à A et de limite nulle.
2. Montrer que le sous-espace $\mathcal{N}$ engendré par les matrices nilpotentes est le sous-espace des matrices de trace nulle.

Exercice 8: (densité des matrices inversibles)

En utilisant l'application déterminant d'une matrice, montrer que l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles est un ouvert dense de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 9: (l'ensemble $O_n(\mathbb{R})$)

L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices orthogonales. C'est-à-dire celles qui vérifient ${}^tMM = I$.

Montrer que l'ensemble $O_n(\mathbb{R})$est un compact de $M_n(\mathbb{R})$ non connexe par arcs.