Feuille d'exercices : Algèbre

<u>Exercice 1:</u> (Pour commencer tranquillement)

1. Montrer que tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique.
2. Soit $(n, d) \in \mathbb{N}^{*2}$ tel que d divise n. Montrer qu'il existe un unique sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de cardinal d.
3. En déduire la relation $n = \sum\limits_{d|n} \varphi(d)$ où φ est l'indicatrice d'Euler.

<u>Exercice 2:</u> (Polynômes de Tchebychev)

Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de $\mathbb{R}[X]$ définie par $\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_1 = X \\ P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n \end{cases}$

1. Calculer P_2, P_3, P_4 et P_5.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $deg(P_n) = n$.
3. Montrer que $\begin{cases} \text{Si } n \text{ est pair, } P_n \text{ est pair, } P_n(-1) = P_n(1) = 1 \text{ et } P_n(0) = \pm 1 \\ \text{Si } n \text{ est impair, } P_n \text{ est impair, } P_n(-1) = -1,\ P_n(1) = 1 \text{ et } P_n(0) = 0 \end{cases}$
4. Montrer que $P_n([-1, 1]) \subset [-1, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a $P_n(cos(\theta)) = cos(n\theta)$.
6. Montrer que l'on a $\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \Pi & \text{si } n = m = 0 \\ \frac{\Pi}{2} & \text{si } n = m \neq \end{cases}$
7. Déterminer les racines de P_n.
8. Déterminer les racines de P_n'.

Exercice 3: (POLYNÔMES DE HILBERT)

Soit l'endomorphisme T de $\mathbb{C}[X]$ défini par $\begin{array}{rcll} T & : & \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}[X] \\ & & P & \longmapsto & T(P) = P(X+1) \end{array}$

et pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle T_n la restriction de T à $\mathbb{C}_n[X]$.

On note $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} H_o(X) = 1 \\ H_n(X) = \frac{1}{n!}\prod\limits_{k=0}^{n-1}(X-k) \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

1. Écrire la matrice $M_n \in M_{n+1}(\mathbb{C})$ de T_n dans la base $\{1, X, ..., X^n\}$ de $\mathbb{C}_n[X]$.
2. Montrer que M_n est inversible et expliciter M_n^{-1}.
3. Montrer que la famille $\{H_j\}_{0\leq j\leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
4. Pour $j \in \mathbb{Z}$, $i \in \mathbb{N}^*$, donner une expression simple de de $H_i(j)$.
5. Montrer que $H_i(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.
6. Pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$, soit $P = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i H_i$ sa décomposition dans la base $\{H_0, H_1, ..., H_n\}$.
   (a) Montrer que $\begin{pmatrix} P(0) \\ . \\ . \\ . \\ P(n) \end{pmatrix} = {}^tM_n \begin{pmatrix} a_0 \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix}$.
   (b) Montrer que pour $i \in \{0, 1, .., n\}$, on a $a_i = \sum\limits_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} P(j)$.
   (c) Si $i \geq n+1$, calculer $\sum\limits_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} P(j)$.
   (d) Montrer que les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$ sont les combinaisons à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de polynômes de $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Soit $u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{C}$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   — Il existe $P \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $u_j = P(j)$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.
   — Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall i \in \mathbb{N}$, $n \geq n+1 \Longrightarrow \sum\limits_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} u_j = 0$.

Exercice 4: (UN PEU DE TECHNIQUE SUR LES MATRICES)

1. Soit A une matrice de rang 1 sur $\mathbb{K}$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $tr(A) \neq 0$.