Paradoxe de Banach-Tarski

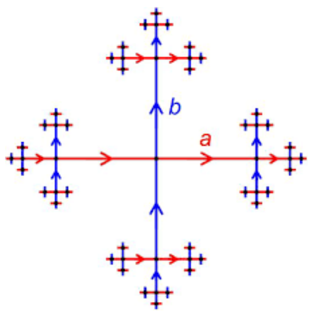
1 Énoncé du paradoxe

Soit la relation d'équivalence $\sim$ sur les ensembles, défini comme suit :
Soit deux ensembles A et B, on a $A \sim B$ si il existe $(A_1, A_2, ..., A_n)$ une partition de A et $(B_1, B_2, ..., B_n)$ une partition de B et $p_1, p_2, ..., p_n$ n isométries telles que $p_i(A_i) = B_i$ pour tout $i = 1, ..., n$.
Le paradoxe de Banach-Tarski s'énonce ainsi :

La sphère S^2 est équivalente à deux sous-parties d'elle-même.

2 Développement du paradoxe

Soit $\theta \in \mathbb{N}$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $n\theta \not\equiv 0 \quad [2\pi]$. Soit Δ un grand axe de S^2 et r_θ la rotation d'axe Δ et d'angle θ. Ainsi pour tout $x \in S^2 \setminus \Delta$, on a $r_\theta^n(x) \neq x$. De plus, $\{r_\theta^n(x)|n\mathbb{Z}\}$ est un sous-ensemble dense dans $S^2 \cap \Delta_x$ où Δ_x est le plan perpendiculaire à Δ passant par x. Soit Δ' un grand axe de S^2 perpendiculaire à Δ et r'_θ la rotation d'axe Δ' et d'angle θ. Soit $\mathbb{F}_2$ le groupe libre à deux générateurs (ie le groupe de présentation $< a, b \quad | \quad aA = Aa = bB = Bb = \epsilon >$, la loi interne étant la concaténation et ϵ étant le mot vide ; autrement dit, c'est l'ensemble de mot constitués des lettres a, A, b et B sans que jamais a et A soient côte-à-côte et de même pour b et B).



On va faire agir $\mathbb{F}_2$ sur S^2 de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{F}_2 \times S^2 & \longrightarrow & S^2 \\ & (u, x) & \mapsto & r(u)(x) \end{array}$$

où $r(u)$ est défini par :

$$\begin{array}{rccl} r: & a & \mapsto & r_\theta \\ & b & \mapsto & r'_\theta \\ & A & \mapsto & r_\theta^{-1} \\ & B & \mapsto & r_\theta'^{-1} \\ & ab & \mapsto & r'_\theta \circ r_\theta \\ & ba & \mapsto & r_\theta \circ r'_\theta \\ & & \dots & \end{array}$$

Montrons que les orbites de deux points sont soit confondues, soit disjointes. Supposons que deux orbites aient un point en commun donc il existe $x, y \in S^2$ et $u, v \in \mathbb{F}_2$ tels que $r(u)(x) = r(v)(y)$. Montrons que toute l'orbite de y est alors contenue dans l'orbite de x. $r(u)(x) = r(v)(y)$ implique $r(v^{-1}u)(x) = r(\epsilon)(y) = y$. Ainsi, pour tout $w \in \mathbb{F}_2$, on a $r(w)(y) = r(v^{-1}uw)(x)$ et donc toute l'orbite de y est inclue dans celle de x.
On va admettre que le groupe $\mathbb{F}_2$ agit librement par l'action r sur S^2 sauf pour les points des orbites contenant un des quatre points d'intersection entre S^2 et Δ ou Δ'. Autrement dit, $\forall x \in S^2$, $\forall (u, v) \in \mathbb{F}_2^2$, $u \neq v$ implique $r(u)(x) \neq r(v)(x)$.
Remarquons la particularité suivante de $\mathbb{F}_2$: en appelant C_a (resp. C_b, C_A et C_B) l'ensemble de des mots de $\mathbb{F}_2$ se terminant pas a (resp. b, A et B), on a $\mathbb{F}_2 = (C_aA) \cup C_A = (C_bB) \cup C_B$. En effet, quel que soit w le mot ne se terminant pas par A alors on a $wa \in C_a$. Ainsi C_A correspond à l'ensemble des mots ne se terminant pas par a et donc $(C_aA) \cup C_A = \mathbb{F}_2$.
Ainsi, grâce à la décomposition $(C_aA) \cup C_A$, on a une copie de l'orbite de x à partir de C_a et C_A puisque $r(\mathbb{F}_2)(x) = r(C_aA \cup C_A)(x) = r(C_aA)(x) \cup r(C_A)(x) = r_\theta^{-1} \circ r(C_a)(x) \cup r(C_A)(x)$. Autrement dit en prenant $r(C_a)(x)$ et en lui appliquant la rotation r_θ^{-1} et en ajoutant l'ensemble $r(C_A)(x)$, on obtient une copie de l'orbite de x. Il en est de même avec l'autre décomposition.
Pour terminer, il reste à considérer toutes les orbites disjointes possibles (nous mettrons de côté les quatre orbites contenant les points d'intersections entre S^2 et Δ ou Δ') qui forment une partition de la sphère S^2. Par l'axiome du choix, on peut prendre un point de chacune de ces orbites pour obtenir un ensemble X. On fait agir $\mathbb{F}_2$ sur chacun de ces points et on appelle S_a (resp. S_b, S_A et S_B) l'ensemble $\{r(u)(x) | (u, x) \in C_a \times X\}$ (resp. C_b, C_A et C_B). Nous obtenons donc

$$S^2 = S_a \cup S_A \cup S_b \cup S_B \cup X$$

(on a X car $\{r(\epsilon)(x) | x \in X\} = X$ n'est pas dans S_a, ni dans S_A, S_b ou S_B) et enfin on a

$$S^2 = r_\theta^{-1}(S_a) \cup S_A = r_\theta'^{-1}(S_b) \cup S_B$$

On a donc une décomposition de S^2 en quatre pièces de sortes qu'en faisant tourner deux pièces et en leur adjoignant à chacune une autre pièce, on obtient deux copies de la sphère.