Chapitre 3 Arithmétique

I Nombres premiers

Définition : Un nombre premier est un nombre qui a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même. (=nombre que l'on ne peut pas décomposer en une multiplication ne comportant pas 1).

Remarque : 2 est le seul nombre premier pair puisque si un nombre est pair et supérieur à 2 alors il est divisible par 2.

Exemples : Les dix premiers nombres premiers sont
2 3 5 7 11 13 17 19 23 29

Théorème : Tout nombre entier est soit un nombre premier, soit il est divisible par un nombre premier.

Propriété : Il y a une infinité de nombres premiers.

II Théorème fondamental de l'algèbre

Théorème : Tout nombre entier se décompose de <u>façon unique</u> en un produit de nombres premiers à l'ordre des facteurs près.

Remarque : « de façon unique » signifie que quelle que soit la méthode que nous utilisons pour décomposer le nombre, nous obtiendrons la même chose.

Exemples :

$$\begin{aligned} 120 &= 2 \times 60 \\ &= 2 \times 2 \times 30 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 15 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 120 &= 12 \times 10 \\ &= 6 \times 2 \times 2 \times 5 \\ &= 2 \times 3 \times 2 \times 2 \times 5 \end{aligned}$$

Remarque : Par convention, on écrit les nombres dans la décomposition du plus petit au plus grand (ainsi, la décomposition est unique puisque l'ordre est unique aussi)

IV Applications de la décomposition

1) Simplification de fractions

Lorsque l'on a la décomposition du numérateur et du dénominateur d'une fraction, pour simplifier la fraction, il suffit d'éliminer les facteurs en commun.

Exemples : $120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$

$924 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 11$

Donc $\frac{120}{924} = \frac{\cancel{2}\times\cancel{2}\times 2\times\cancel{3}\times 5}{\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times 7\times 11} = \frac{2\times 5}{7\times 11} = \frac{10}{77}$

2) Trouver le plus petit multiple de deux nombres

La décomposition d'un multiple commun à deux nombres contient tous les facteurs des décompositions des deux nombres.

Le plus petit commun multiple de deux nombres A et B se nomme le PPCM de A et B et se note PPCM(A;B).

Exemples : $120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$

$126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$

Pour trouver le plus petit multiple commun, il suffit de rajouter à 120 les facteurs qui sont dans 126 et qui manquent.

Donc le plus petit multiple de 120 et 126 est

$$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 3 \times 7$$

Ce qui fait 2520. 2520 est bien dans la table de 120 et de 126 puisque $2520 = 120 \times 3 \times 7$ et $2520 = 126 \times 2 \times 2 \times 5$.

On a donc PPCM(120;126)=2520.

3) Trouver le grand diviseur de deux nombres

La décomposition d'un diviseur commun à deux nombres contient les facteurs qui sont en commun dans les décompositions des deux nombres.

Le plus grand commun diviseur de deux nombres A et B se nomme le PGCD de A et B et se note PGCD(A;B).

Exemples : $120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$

$630 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$

Pour trouver le plus petit multiple commun, il prendre les facteurs qui sont en commun.

Donc le plus grand diviseur de 120 et 630 est

$$2 \times 3 \times 5$$

Ce qui fait 30. 30 est bien un diviseur de 120 et de 630 puisque $120 = 30 \times 4$ et 630$= 30 \times 21$.

On a donc PGCD(120;630)=30.

4) Simplifier une racine carrée

Quels que soient les nombres a et b, on a

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

De plus on sait que quel que soit a, on a

$$\sqrt{a \times a} = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$$

Pour simplifier une racine carrée, on décompose le nombre, on extrait les termes en double.

Exemples : $120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$

Ainsi : $\sqrt{120} = \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5}$

$= \sqrt{2 \times 2} \times \sqrt{3 \times 3} \times \sqrt{2 \times 5}$

$= 2 \times 3 \times \sqrt{2 \times 5}$

$= 6\sqrt{10}$

V Algorithmes pour trouver le PGCD de deux nombres

Trouver la décomposition en facteurs premiers d'un nombre est parfois difficile (essaie par exemple de décomposer, sans calculatrice, le nombre 667). Donc trouver le PGCD ou le PPCM de deux nombres parait difficile. Mais il y a des méthodes simples qui le permettent.

A) Algorithme des soustractions successives

Principe : on soustrait les deux nombres. On obtient un troisième nombre. De ces trois nombres, on prend les deux plus petits et on recommence. A la fin, on obtient 0, le PGCD des deux nombres du début est le nombre que l'on a soustrait en dernier.

Exemple : On cherche le PGCD de 120 et 630.

On fait alors : $630 - 120 = 510$

$510 - 120 = 390$

$390 - 120 = 270$

$270 - 120 = 150$

$150 - 120 = 30$

$120 - 30 = 90$

$90 - 30 = 60$

$60 - 30 = 30$

$30 - \boxed{30} = 0$

B) Algorithme d'Euclide

C'est en fait la même méthode mais en faisant des divisions, on gagne en rapidité.

(voir la vidéo https://youtu.be/EVQY8DG5_es)

Exemple : On cherche le PGCD de 120 et 630.

On fait alors : $630 = 120 \times 5 + \boxed{30}$

$120 = 30 \times 4 + 0$

VI PGCD et PPCM : la formule magique !

On a donc une méthode pour trouver le PGCD. Or, parfois, c'est le PPCM qui est utile. Mais il existe une formule qui relie les deux :

$$\mathrm{PPCM}(a;b) = \frac{a \times b}{\mathrm{PGCD}(a;b)}$$

Exemple : On a vu que PGCD(630 ;120)=30 donc on a

$$PPCM(630;120) = \frac{630 \times 120}{30} = 2520$$