Notations.

Dans tout le sujet, $\mathbb{R}$ *désignera le corps des nombres réels et* $\mathbb{N}$ *l'ensemble des entiers naturels. De plus,* n *désignera un entier naturel strictement supérieur à 1.*

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$*. Pour* X *est une variable aléatoire réelle définie sur* Ω*, on note* $\mathbf{E}(X)$ *son espérance (lorsqu'elle existe) et* $\mathbf{V}(X)$ *sa variance (lorsqu'elle existe).*
On rappelle que, sous réserve d'existence, la covariance de deux variables aléatoires X *et* Y *définies sur* Ω *est le nombre réel noté* $\mathbf{Cov}(X,Y)$ *et défini par*

$$\mathbf{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}\big((X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y))\big) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y).$$

En conséquence, sous réserve de l'existence de $\mathbf{V}(X)$*,* $\mathbf{V}(Y)$ *et* $\mathbf{V}(X+Y)$ *:*

$$\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\mathbf{Cov}(X,Y).$$

Objectifs du problème.

Soit X *une variable aléatoire définie sur* Ω*. On se place dans le contexte où la loi de* X *n'est pas complètement spécifiée et où cette loi dépend d'un paramètre* θ *inconnu. Le but de l'estimation consiste à approcher la valeur de ce paramètre* θ*, ou éventuellement la valeur de son image* $g(\theta)$ *par une fonction réelle* g*.*
La première partie revient sur quelques résultats au sujet des séries entières. La deuxième partie étudie les familles sommables. Dans les deux dernières parties, on se place dans le cas où X *est une variable aléatoire définie sur* Ω *suivant une loi de Poisson de paramètre* θ *inconnu et on développe quelques outils pour l'estimation de ce paramètre.*

I. Séries entières.

1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera soigneusement les réponses.

- **(a)** Affirmation : « soient $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suite de nombre réels positifs, telles que la série de terme général v_k converge et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k \leqslant v_k$. Alors la série de terme général u_k converge également ».
- **(b)** Affirmation : « soient $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suite de nombre réels, telles que la série de terme général v_k converge et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k \leqslant v_k$. Alors la série de terme général u_k converge également ».
- **(c)** Affirmation : « soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels tous non nuls. On suppose que

  $$\lim_{k\longrightarrow+\infty} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \ell,$$

  avec $\ell < 1$. Alors la série de terme général u_k converge absolument ».
- **(d)** Affirmation : « soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles continues définies sur un même intervalle I, telle que pour tout $x \in I$, la suite $(u_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $U(x)$. La fonction U ainsi définie sur I est continue ».

Tournez la page S.V.P.

2. *Question de cours*. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On rappelle que le rayon de convergence de la série entière de terme général $u_k x^k$ est défini par

$$R = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid (|u_k x^k|)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est majorée}\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

i. Montrer que si $|x| < R$, alors la série de terme général $u_k x^k$ converge absolument.

ii. Montrer que si $|x| > R$, alors la série de terme général $u_k x^k$ diverge.

On considère alors la fonction $S :]-R, R[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k.$$

(b) Soit $R' \in]0, R[$. Montrer que la série de terme général $u_k x^k$ converge uniformément sur $[-R', R']$. Que peut-on en déduire sur la régularité de S ?

(c) Montrer que le rayon de convergence de la série de terme général $(k+1)u_{k+1}x^k$ est égal à R.

(d) Montrer que S est indéfiniment dérivable sur $]-R, R[$.

3. Soit r un entier naturel non nul. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $\dfrac{k^r x^k}{k!}$. Déterminer sa somme lorsque $r = 1$ et lorsque $r = 2$.

4. On note, pour tout entier $N \geqslant 1$, α_N le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1, N]\!]$ et on convient que $\alpha_0 = 1$.

(a) Calculer α_1, α_2 et α_3.

(b) Montrer que pour tout entier $N \geqslant 0$,

$$\alpha_{N+1} = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \alpha_k.$$

(c) Montrer que, pour tout $N \geqslant 0$, $\alpha_N \leqslant N!$.

(d) En déduire que la série entière de terme général $\dfrac{\alpha_N x^N}{N!}$ converge pour tout x réel tel que $|x| < 1$. On note $f(x)$ sa somme.

(e) Montrer que f est dérivable sur $]-1, 1[$ et que pour tout $x \in]-1, 1[$, $f'(x) = \mathrm{e}^x f(x)$. En déduire que pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x - 1}$.

(f) En déduire que pour tout entier naturel N,

$$\alpha_N = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^N}{k!}.$$

II. Familles sommables.

Soit $I \subset \mathbb{N}^n$. Les éléments de I seront notés sous la forme $\underline{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$.

Cas des familles sommables de réels positifs.

Soit $u = (u_{\underline{i}})_{\underline{i} \in I}$ une famille de réels positifs ou nuls indexée par I. On dit que u est sommable lorsque la borne supérieure suivante est finie :

$$\sup \left\{ \sum_{\underline{i} \in J} u_{\underline{i}},\ J \subset I \text{ et } J \text{ fini} \right\} < +\infty.$$

Dans ce cas, on note

$$\sum_{\underline{i} \in I} u_{\underline{i}} = \sup \left\{ \sum_{\underline{i} \in J} u_{\underline{i}},\ J \subset I \text{ et } J \text{ fini} \right\}.$$

Soit $u = (u_{\underline{i}})_{\underline{i} \in I}$ et $(v_{\underline{i}})_{\underline{i} \in I}$ deux familles de réels positifs et a, b deux réels positifs.

5. On suppose que pour tout $\underline{i} \in I$,

$$u_{\underline{i}} \leqslant v_{\underline{i}}.$$

Montrer que si v est sommable, alors u est sommable.

6. On suppose que u et v sont sommables. Montrer que la famille $au + bv$ définie par

$$(au + bv)_{\underline{i}} = au_{\underline{i}} + bv_{\underline{i}}$$

est sommable et que

$$\sum_{\underline{i} \in I} (au_{\underline{i}} + bv_{\underline{i}}) = a \left(\sum_{\underline{i} \in I} u_{\underline{i}} \right) + b \left(\sum_{\underline{i} \in I} v_{\underline{i}} \right).$$

7. On considère $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une famille de sous-ensembles de I tels que

- ▷ $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k = I$.
- ▷ Pour tout $k, l \in \mathbb{N}$, distincts, $I_k \cap I_l = \emptyset$.

Par convention, si $I_k = \emptyset$, on pose

$$\sum_{\underline{i} \in I_k} u_{\underline{i}} = 0.$$

On suppose que u est sommable.

(a) Montrer que la famille $(u_{\underline{i}})_{\underline{i} \in I_k}$ est sommable pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{p} \left(\sum_{\underline{i} \in I_k} u_{\underline{i}} \right) \leqslant \sum_{\underline{i} \in I} u_{\underline{i}}.$$

(c) Montrer que la série de terme général $\sum_{\underline{i} \in I_k} u_{\underline{i}}$ converge. Sa somme est notée $\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\underline{i} \in I_k} u_{\underline{i}}$.

Tournez la page S.V.P.

(d) Montrer que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\underline{i} \in I_k} u_{\underline{i}} \leqslant \sum_{\underline{i} \in I} u_{\underline{i}}.$$

8. Réciproquement, montrer que si la famille $(u_{\underline{i}})_{\underline{i} \in I_k}$ est sommable pour tout $k \in \mathbb{N}$ et si la série de terme général $\displaystyle\sum_{\underline{i} \in I_k} u_{\underline{i}}$ converge, alors $(u_{\underline{i}})_{\underline{i} \in I}$ est sommable et

$$\sum_{\underline{i} \in I} u_{\underline{i}} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\underline{i} \in I_k} u_{\underline{i}}.$$

9. Déduire des questions précédentes le résultat suivant, appelé *théorème de sommation par paquets* :
$(u_{\underline{i}})_{\underline{i} \in I_k}$ est sommable pour tout $k \in \mathbb{N}$ et la série de terme général $\displaystyle\sum_{\underline{i} \in I_k} u_{\underline{i}}$ converge si et seulement si $(u_{\underline{i}})_{\underline{i} \in I}$ est sommable. De plus, dans ce cas,

$$\sum_{\underline{i} \in I} u_{\underline{i}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\underline{i} \in I_k} u_{\underline{i}}.$$

Cas des familles sommables de réels quelconques*.*

Soit $u = (u_{\underline{i}})_{\underline{i} \in I}$ une famille de réels indexée par I. On dit que u est sommable lorsque la famille de réels positifs ou nuls $|u| = (|u_{\underline{i}}|)_{\underline{i} \in I}$ est sommable.

Soit $u = (u_{\underline{i}})_{\underline{i} \in I}$ une famille de réels indexée par I. Pour tout $\underline{i} \in I$, on pose

$$u_{\underline{i}}^{+} = \max\left(u_{\underline{i}}, 0\right) \qquad \text{et} \qquad u_{\underline{i}}^{-} = \max\left(-u_{\underline{i}}, 0\right).$$

Ceci définit deux familles $u^+ = (u_{\underline{i}}^+)_{\underline{i} \in I}$ et $u^- = (u_{\underline{i}}^-)_{\underline{i} \in I}$ de réels positifs ou nuls.

10. Soit $u = (u_{\underline{i}})_{\underline{i} \in I}$ une famille de réels indexée par I. Montrer que la famille u est sommable si et seulement si les familles u^+ et u^- sont sommables.

Pour $(u_{\underline{i}})_{\underline{i} \in I}$ une famille sommable de réels, on définit alors sa somme par

$$\sum_{\underline{i} \in I} u_{\underline{i}} = \left(\sum_{\underline{i} \in I} u_{\underline{i}}^{+}\right) - \left(\sum_{\underline{i} \in I} u_{\underline{i}}^{-}\right).$$

11. Soient $u = (u_{\underline{i}})_{\underline{i} \in I}$ et $v = (v_{\underline{i}})_{\underline{i} \in I}$ deux familles sommables de réels.

(a) Montrer que la famille $u + v$ définie par

$$(u+v)_{\underline{i}} = u_{\underline{i}} + v_{\underline{i}}$$

est sommable et

$$\sum_{\underline{i} \in I} (u_{\underline{i}} + v_{\underline{i}}) = \left(\sum_{\underline{i} \in I} u_{\underline{i}}\right) + \left(\sum_{\underline{i} \in I} v_{\underline{i}}\right).$$

(b) Soient a et b deux réels. Montrer que la famille $au + bv$ définie par

$$(au+bv)_{\underline{i}} = au_{\underline{i}} + bv_{\underline{i}}$$

est sommable et déterminer sa somme en fonction des sommes de u et v.

12. On considère $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de sous-ensembles de I tels que

▷ $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k = I.$

▷ Pour tout $k, l \in \mathbb{N}$, distincts, $I_k \cap I_l = \emptyset$.

Par convention, si $I_k = \emptyset$, on pose

$$\sum_{\underline{i}\in I_k} u_{\underline{i}} = 0.$$

Montrer que $(u_{\underline{i}})_{\underline{i}\in I_k}$ est sommable pour tout $k \in \mathbb{N}$ et la série de terme général $\displaystyle\sum_{\underline{i}\in I_k} |u_{\underline{i}}|$ converge si et seulement si $(u_{\underline{i}})_{\underline{i}\in I}$ est sommable. De plus dans ce cas, vérifier que

$$\sum_{\underline{i}\in I} u_{\underline{i}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\underline{i}\in I_k} u_{\underline{i}}.$$

Application : Théorème du transfert.

13. Soit $X_1, X_2, \ldots, X_k$ des variables aléatoires réelles discrètes définies sur Ω et φ une application définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $T = \varphi(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ soit encore une variable aléatoire réelle discrète définie sur Ω. Pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, l'univers-image de X_i est noté

$$X_i(\Omega) = \{x_{i,j} \mid j \in I_i\},$$

où I_i est une partie de $\mathbb{N}$. On pose $I = I_1 \times \ldots \times I_n$.
Montrer que les deux assertions (A_1) et (A_2) suivantes sont équivalentes :

(A_1) T admet une espérance.

(A_2) La famille $\displaystyle\left(\varphi(x_{1,i_1}, x_{2,i_2}, \ldots, x_{n,i_n})\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k = x_{k,i_k}]\right)\right)_{\underline{i}\in I}$ est sommable.

De plus dans ce cas, vérifier que

$$\mathbf{E}(T) = \sum_{(i_1 i_2,\ldots,x_k)\in I} \varphi(x_{1,i_1}, x_{2,i_2}, \ldots, x_{n,i_n})\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k = x_{k,i_k}]\right).$$

III. Estimateurs.

Soit I un intervalle ouvert, non vide, inclus dans $]0, +\infty[$.

On considère une variable aléatoire X définie sur Ω suivant une loi de Poisson dépendante d'un paramètre réel $\theta \in I$, inconnu : autrement dit, $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et, pour tout entier naturel k,

$$\mathbf{P}([X = k]) = \frac{\theta^k}{k!}e^{-\theta}.$$

Tournez la page S.V.P.

On cherche à approcher la valeur de ce paramètre θ, ou éventuellement la valeur de son image $g(\theta)$ par une fonction réelle g définie sur I.

14. (a) À l'aide des résultats de la première partie, montrer que X admet des moments d'ordre r pour tout r entier naturel non nul (c'est-à-dire que X^r admet une espérance pour tout r entier naturel non nul) puis que l'espérance et la variance de X sont égales à θ.

(b) Donner une interprétation combinatoire des moments d'ordre r de X lorsque $\theta = 1$.

15. Soit n variables aléatoires $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ définies sur Ω, mutuellement indépendantes, suivant des lois de Poisson de paramètre respectif $\theta_1, \dots, \theta_n$. Montrer que la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$ suit la loi de Poisson de paramètre $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \theta_i$. *Indication* : on pourra démontrer d'abord le cas $n = 2$.

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles définies sur Ω, mutuellement indépendantes, et de même loi que X. Soit φ une application définie sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ soit encore une variable aléatoire définie sur Ω.

- ▷ *Le n-uplet $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est appelé un n-échantillon de la loi de X et la variable aléatoire $T_n = \varphi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est appelée un estimateur de $g(\theta)$.*
- ▷ *Après une réalisation de l'expérience aléatoire associée à Ω, on note $x_1, x_2, \dots, x_n$ les valeurs prises par $X_1, X_2, \dots, X_n$: ce sont les* observations de l'échantillon. *Le réel $t = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est appelé une réalisation de l'estimateur T_n de $g(\theta)$ et est choisie comme estimation ponctuelle de la valeur de $g(\theta)$.*

Autrement dit, estimer ponctuellement $g(\theta)$, c'est décider d'accorder à $g(\theta)$ la valeur expérimentale $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Les outils suivants vont nous permettre d'étudier les estimateurs et de choisir le plus pertinent : soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un n-échantillon de la loi de X et T_n un estimateur de $g(\theta)$ admettant une espérance $\mathbf{E}(T_n)$, dépendant éventuellement de θ.

- ▷ *Le réel $\mathbf{E}(T_n) - g(\theta)$ est appelé* biais *de T_n et est noté $b_\theta(T_n)$.*
- ▷ *L'estimateur T_n est dit* sans biais *lorsque $b_\theta(T_n) = 0$, c'est-à-dire lorsque $\mathbf{E}(T_n) = g(\theta)$.*
- ▷ *Si l'estimateur T_n admet une variance $\mathbf{V}(T_n)$, dépendant éventuellement de θ, on appelle* risque quadratique *de T_n le réel*

$$r_\theta(T_n) = \mathbf{E}\left((T_n - g(\theta))^2\right) = b_\theta(T_n)^2 + \mathbf{V}(T_n).$$

En particulier si T_n est sans biais, alors $r_\theta(T_n) = \mathbf{V}(T_n)$.

Une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'estimateurs de $g(\theta)$ admettant une espérance est dite asymptotiquement sans biais *lorsque* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_\theta(T_n) = 0$.

On commence par étudier deux estimateurs de θ : la moyenne et la variance empiriques. Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un n-échantillon de la loi de X. On définit la moyenne empirique *$\overline{X_n}$ de $X_1, X_2, \dots, X_n$ et la* variance empirique *$\overline{S_n}$ de $X_1, X_2, \dots, X_n$ par*

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \qquad \textit{et} \qquad \overline{S_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(X_k - \overline{X_n}\right)^2.$$

16. Montrer que $\overline{X_n}$ est un estimateur sans biais de θ et que son risque quadratique est $\dfrac{\theta}{n}$.

17. (a) Montrer que

$$n\overline{S_n} = \sum_{k=1}^{n} X_k^2 - n\overline{X_n}^2.$$

En déduire $\mathbf{E}(\overline{S_n})$.

(b) Montrer que $\overline{S_n}$ est un estimateur asymptotiquement sans biais de θ.

(c) Montrer que $\widehat{S_n} = \dfrac{n}{n-1}\overline{S_n}$ est un estimateur sans biais de θ. Cet estimateur est appelé *variance empirique corrigée*.

18. (a) Montrer que

$$n\overline{S_n} = \left(\sum_{k=1}^{n}(X_k-\theta)^2\right) - n(\overline{X_n}-\theta)^2.$$

(b) En déduire que $n\overline{S_n}$ admet une variance donnée par la formule suivante :

$$\mathbf{V}\left(n\overline{S_n}\right) = n\mathbf{V}\left((X-\theta)^2\right) - 2n^2\mathbf{Cov}\left((X_1-\theta)^2, (\overline{X_n}-\theta)^2\right) + n^2\mathbf{V}\left((\overline{X_n}-\theta)^2\right).$$

(c) Montrer que

$$n^4\mathbf{E}\left((\overline{X_n}-\theta)^4\right) = n\mathbf{E}\left((X-\theta)^4\right) + 3n(n-1)\theta^2.$$

Indication : on remarquera que lorsqu'on développe $\left(\sum_{k=1}^{n}(X_k-\theta)\right)^4$, on obtient des termes de la forme $(X_i-\theta)^4$ ou $(X_i-\theta)^2(X_j-\theta)^2$ ou $(X_i-\theta)^3(X_j-\theta)$ ou $(X_i-\theta)^2(X_j-\theta)(X_k-\theta)$ ou $(X_i-\theta)(X_j-\theta)(X_k-\theta)(X_l-\theta)$ avec i, j, k, l distincts deux à deux, dont on précisera l'espérance.

(d) En déduire que

$$n^2\mathbf{V}\left((\overline{X_n}-\theta)^2\right) = \frac{\mathbf{E}\left((X-\theta)^4\right) + (2n-3)\theta^2}{n}.$$

(e) Montrer que

$$n^2(\overline{X_n}-\theta)^2 = \sum_{k=1}^{n}(X_k-\theta)^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(X_i-\theta)(X_j-\theta).$$

(f) En déduire que

$$n^2\mathbf{E}\left((X_1-\theta)^2(\overline{X_n}-\theta)^2\right) = \mathbf{E}\left((X-\theta)^4\right) + (n-1)\theta^2,$$

puis que

$$\mathbf{Cov}\left((X_1-\theta)^2, (\overline{X_n}-\theta)^2\right) = \frac{\mathbf{E}\left((X-\theta)^4\right) - \theta^2}{n^2}.$$

(g) Déduire des questions précédentes que

$$\mathbf{V}\left(\widehat{S_n}\right) = \frac{1}{n}\mathbf{E}\left((X-\theta)^4\right) - \frac{n-3}{n(n-1)}\theta^2.$$

IV. Inégalité de Cramer-Rao.

Le meilleur estimateur possible est un estimateur sans biais de variance minimale. Pour étudier cet extremum, nous allons établir l'inégalité de Cramer-Rao.

On se place toujours dans $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ *un espace probabilisé et on considère de nouveau* X *une variable aléatoire définie sur* Ω *suivant une loi de Poisson dépendante d'un paramètre réel* $\theta \in I$ *inconnu avec* I *intervalle non vide ouvert inclus dans* $]0, +\infty[$. *On considère les fonctions suivantes :*

$$f : \left\{ \begin{array}{ccl} I \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\theta, k) & \longmapsto & \mathbf{P}([X = k]) = \dfrac{\theta^k}{k!} e^{-\theta}. \end{array} \right.$$

$$g : \left\{ \begin{array}{ccl} I \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\theta, k) & \longmapsto & \ln\left(f(\theta, k)\right). \end{array} \right.$$

On définit sous réserve d'existence l'information de Fisher *de* X *par*

$$F_X(\theta) = \mathbf{V}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta, X)\right).$$

19. Montrer que pour tout $\theta \in I$,

$$\mathbf{E}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta, X)\right) = 0,$$

puis que

$$F_X(\theta) = \frac{1}{\theta}.$$

Soit φ *une fonction réelle telle que* $\varphi(X)$ *soit une variable aléatoire définie sur* Ω, *admettant une espérance* $\mathbf{E}(\varphi(X))$ *et une variance* $\mathbf{V}(\varphi(X))$ *pour tout* $\theta \in I$.
L'inégalité de Cramer-Rao affirme que

$$\mathbf{V}(\varphi(X)) \geqslant \frac{\left(\dfrac{\partial}{\partial \theta}\mathbf{E}\left(\varphi(X)\right)\right)^2}{F_X(\theta)}.$$

Nous allons démontrer cette inégalité.

20. (a) Montrer que la fonction $\psi : \theta \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(k) f(\theta, k)$ est définie et dérivable sur I et que pour tout $\theta \in I$,

$$\psi'(\theta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(k) \frac{\partial f}{\partial \theta}(\theta, k).$$

(b) En déduire que

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\mathbf{E}(\varphi(X)) = \mathbf{E}\left(\varphi(X)\frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta, X)\right).$$

21. On fixe temporairement $\theta \in I$ et on considère la fonction Q_θ suivante dépendant d'une variable réelle t :

$$Q_\theta(t) = \mathbf{E}\left(\left(\varphi(X) - \mathbf{E}(\varphi(X)) + t\frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta, X)\right)^2\right).$$

(a) Montrer que Q_θ est un polynôme de degré 2 défini sur $\mathbb{R}$.

(b) Étudier le discriminant de Q_θ.

(c) En déduire l'inégalité de Cramer-Rao.

Nous allons généraliser cette inégalité à nos estimateurs.
Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de la loi de X. On appelle fonction de vraisemblance *pour les observations $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ de l'échantillon la fonction du paramètre $\theta \in I$ définie de la façon suivante :*

$$\mathcal{L}(\theta, k_1, k_2, \ldots, k_n) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n}[X_j = k_j]\right).$$

On définit, sous réserve d'existence, l'information de Fisher *de l'échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ par*

$$F(\theta) = V\left(\frac{\partial \ln(\mathcal{L})}{\partial \theta}(\theta, X_1, X_2, \ldots, X_n)\right).$$

22. Montrer que pour tout $\theta \in I$,

$$\mathbf{E}\left(\frac{\partial \ln(\mathcal{L})}{\partial \theta}(\theta, X_1, X_2, \ldots, X_n)\right) = 0,$$

puis que

$$F(\theta) = nF_X(\theta).$$

Soit $T_n = \varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un estimateur de $g(\theta)$ admettant une espérance pour tout $\theta \in I$ avec g dérivable sur I. On dit que T_n est régulier *lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

▷ *Pour tout $\theta \in I$, la famille*

$$\left(\varphi(k_1, k_2, \ldots, k_n)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}(\theta, k_1, k_2, \ldots, k_n)\right)_{(k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n}$$

est sommable.

▷ *La relation suivante est vérifiée :*

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sum_{(k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n} \varphi(k_1, k_2, \ldots, k_n)\mathcal{L}(\theta, k_1, k_2, \ldots, k_n)\right)$$
$$= \sum_{(k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n} \varphi(k_1, k_2, \ldots, k_n)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}(\theta, k_1, k_2, \ldots, k_n).$$

23. (a) Montrer que tout estimateur T_n de $g(\theta)$ admettant une espérance est régulier.

(b) En déduire que pour tout $\theta \in I$,

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\mathbf{E}(T_n) = \mathbf{E}\left(T_n \frac{\partial \ln(\mathcal{L})}{\partial \theta}(\theta, X_1, X_2, \ldots, X_n)\right) = \mathbf{E}\left((T_n - g(\theta))\frac{\partial \ln(\mathcal{L})}{\partial \theta}(\theta, X_1, X_2, \ldots, X_n)\right).$$

24. Montrer que si T_n est un estimateur sans biais de $g(\theta)$ admettant un moment d'ordre 2 pour tout $\theta \in I$, alors

$$\mathbf{V}(T_n) \geqslant \frac{g'(\theta)^2}{nF_X(\theta)}.$$

Un estimateur sans biais de $g(\theta)$ admettant un moment d'ordre 2 est dit efficace *s'il atteint la borne de Cramer-Rao, c'est-à-dire si*

$$\mathbf{V}(T_n) = \frac{g'(\theta)^2}{nF_X(\theta)}.$$

25. Montrer que $\overline{X_n}$ est un estimateur efficace de θ.

26. Nous allons maintenant chercher les estimateurs réguliers sans biais efficaces de θ.

(a) Soit T_n un estimateur efficace et sans biais de θ admettant un moment d'ordre 2. Montrer que T_n et $\overline{X_n}$ sont presque sûrement liées par une relation affine.

(b) Montrer qu'il existe deux estimateurs de θ sans biais et efficaces et admettant un moment d'ordre 2, dont l'un est $\overline{X_n}$. Que peut-on penser du second pour les applications pratiques ?

FIN DU SUJET