

Arithmétique

I Nombres premiers

Définition : Un nombre premier est un nombre qui a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même. (=nombre que l'on ne peut pas décomposer en une multiplication ne comportant pas 1).

Remarque : 2 est le seul nombre premier pair puisque si un nombre est pair et supérieur à 2 alors il est divisible par 2.

Exemples : Les dix premiers nombres premiers sont

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29

Théorème : Tout nombre entier est soit un nombre premier, soit il est divisible par un nombre premier.

Propriété : Il y a une infinité de nombres premiers.

II Théorème fondamental de l'algèbre

Théorème : Tout nombre entier se décompose de façon unique en un produit de nombres premiers à l'ordre des facteurs près.

Remarque : « de façon unique » signifie que quelle que soit la méthode que nous utilisons pour décomposer le nombre, nous obtiendrons la même chose.

Exemples : $120 = 2 \times 60$

$$= 2 \times 2 \times 30$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 15$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

$120 = 12 \times 10$

$$= 6 \times 2 \times 2 \times 5$$

$$= 2 \times 3 \times 2 \times 2 \times 5$$

Remarque : Par convention, on écrit les nombres dans la décomposition du plus petit au plus grand (ainsi, la décomposition est unique puisque l'ordre est unique aussi)

IV Applications de la décomposition

1) Simplification de fractions

Lorsque l'on a la décomposition du numérateur et du dénominateur d'une fraction, pour simplifier la fraction, il suffit d'éliminer les facteurs en commun.

Exemples : $120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$

$$924 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 11$$

$$\text{Donc } \frac{120}{924} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times \cancel{3} \times 5}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times 7 \times 11} = \frac{2 \times 5}{7 \times 11} = \frac{10}{77}$$

2) Trouver les diviseurs d'un nombre

Si l'on décompose un diviseur d'un nombre N, on obtient des nombres qui étaient dans la décomposition de N. Donc, pour trouver tous les diviseurs d'un nombre, il faut utiliser des nombres de sa décomposition et les multiplier. La difficulté est de trouver toutes les combinaisons possibles

Exemples : $126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$

Pour trouver tous les diviseurs de 126, on va multiplier des nombres de sa décomposition. On obtient

1

2

3

7

$$2 \times 3 = 6 \quad 2 \times 7 = 14 \quad 3 \times 3 = 9 \quad 3 \times 7 = 21$$

$$2 \times 3 \times 3 = 18 \quad 2 \times 3 \times 7 = 42 \quad 3 \times 3 \times 7 = 63$$

$$2 \times 3 \times 3 \times 7 = 126$$

Les diviseurs de 126 sont donc :

1, 2, 3, 6, 7, 9, 14, 18, 21, 42, 63, 126 (remis dans l'ordre croissant)