# Chapitre 5 Arithmétique

## I Nombres premiers

Définition : Un nombre premier est un nombre qui a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même. (=nombre que l'on ne peut pas décomposer en une multiplication ne comportant pas 1).

Remarque : 2 est le seul nombre premier pair puisque si un nombre est pair et supérieur à 2 alors il est divisible par 2.

Exemples : Les dix premiers nombres premiers sont
2 3 5 7 11 13 17 19 23 29

Théorème : Tout nombre entier est soit un nombre premier, soit il est divisible par un nombre premier.

Propriété : Il y a une infinité de nombres premiers.
Preuve :
Une première remarque est que si un $n$ est un nombre supérieur à 2 et que l'on a un nombre A dans sa table alors A+1 n'est pas dans sa table (en effet, les nombres dans la table de $n$ sont espacés de $n$ alors qu'il y a 1 entre A et A+1).
Preuve grâce à un raisonnement par l'absurde :
Supposons qu'il n'y en ait pas une infinité, alors il existe un plus grand nombre premier que nous appellerons $p$. Regardons le nombre $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times ... \times p$ (on a multiplié tous les nombres premiers). Ce nombre est un multiple de 2, mais aussi un multiple de 3, mais aussi un multiple de 5…. C'est un multiple de tous les nombres premiers.
Regardons maintenant $2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times ... \times p + 1$. Avec la remarque précédente, il n'est pas dans la table de 2, ni de 3, ni de 5… Il est dans aucune table d'un nombre premier. Il est donc un nombre premier. Or, il est plus grand que $p$ qui était censé être le

plus grand, ce qui est absurde. Donc l'hypothèse que nous avions faite est fausse : il n'existe pas un nombre fini de nombres premiers.

## II Théorème fondamental de l'algèbre

Théorème : Tout nombre entier se décompose de façon unique en un produit de nombres premiers à l'ordre des facteurs près.

Remarque : « de façon unique » signifie que quelle que soit la méthode que nous utilisons pour décomposer le nombre, nous obtiendrons la même chose.

Exemples : $120 = 2 \times 60$
$= 2 \times 2 \times 30$
$= 2 \times 2 \times 2 \times 15$
$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$

$120 = 12 \times 10$
$= 6 \times 2 \times 2 \times 5$
$= 2 \times 3 \times 2 \times 2 \times 5$

Remarque : Par convention, on écrit les nombres dans la décomposition du plus petit au plus grand (ainsi, la décomposition est unique puisque l'ordre est unique aussi)

## IV Applications de la décomposition

### 1) Simplification de fractions

Lorsque l'on a la décomposition du numérateur et du dénominateur d'une fraction, pour simplifier la fraction, il suffit d'éliminer les facteurs en commun.

Exemples : $120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$
$924 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 11$

Donc $\frac{120}{924} = \frac{\cancel{2}\times\cancel{2}\times2\times\cancel{3}\times5}{\cancel{2}\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times7\times11} = \frac{2\times5}{7\times11} = \frac{10}{77}$

## 2) Trouver le plus petit multiple de deux nombres

La décomposition d'un multiple commun à deux nombres contient tous les facteurs des décompositions des deux nombres.
Le plus petit commun multiple de deux nombres A et B se nomme le PPCM de A et B et se note PPCM(A;B).

Exemples : $120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$
$126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$

Pour trouver le plus petit multiple commun, il suffit de rajouter à 120 les facteurs qui sont dans 126 et qui manquent.
Donc le plus petit multiple de 120 et 126 est

$$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 3 \times 7$$

Ce qui fait 2520. 2520 est bien dans la table de 120 et de 126 puisque $2520 = 120 \times 3 \times 7$ et $2520 = 126 \times 2 \times 2 \times 5$.
On a donc PPCM(120;126)=2520.

## 3) Trouver le grand diviseur de deux nombres

La décomposition d'un diviseur commun à deux nombres contient les facteurs qui sont en commun dans les décompositions des deux nombres.
Le plus grand commun diviseur de deux nombres A et B se nomme le PGCD de A et B et se note PGCD(A;B).

Exemples : $120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$
$630 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$

Pour trouver le plus petit multiple commun, il prendre les facteurs qui sont en commun.
Donc le plus grand diviseur de 120 et 630 est

$$2 \times 3 \times 5$$

Ce qui fait 30. 30 est bien un diviseur de 120 et de 630 puisque $120 = 30 \times 4$ et 630$= 30 \times 21$.
On a donc PGCD(120;630)=30.